1988

ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

CONCOURS D'ADMISSION SESSION DE 1988

MATHÉMATIQUES : 2ÈME ÉPREUVE DURÉE 2 H - COEFFICIENT 2

EXERCICE I :

On considère deux urnes A et B contenant des boules blanches et des boules noires. L'urne A contient des boules blanches en proportion a $(0<a<1)$; l'urne B contient des boules blanches en proportion b $(0<b<1)$.

On effectue N tirages successifs avec remise de la boule dans l'urne d'où elle provient ; et ceci de la façon suivante :

- On commence par choisir l'une des deux urnes (chaque urne a la même probabilité d'être choisie) ; puis on tire une boule :
  - Si elle est blanche, on tire la boule suivante dans la même urne.
  - Si elle est noire, on tire la boule suivante dans l'autre urne.
- On continue suivant la même règle jusqu'au Nième tirage.

Soit $1\leqslant n\leqslant N$; on note :

P_n : Probabilité d'obtenir une boule blanche au nième tirage.

Q_n : Probabilité pour que le nième tirage soit effectué dans l'urne A.

1°) Calculer P_1, Q_2 puis P_2.

2°) Déterminer une relation liant Q_n et Q_{n-1} $(2\leqslant n\leqslant N)$.

3°) On définit x par : $x = (a + b - 1)x + 1 - b$.
Montrer que la suite (U_n) de terme général $U_n = Q_n - x$ pour $n \geqslant 1$ est une suite géométrique de raison $a + b - 1$.

4°) En déduire l'expression de Q_n en fonction de a, b et n.

5°) Déterminer l'expression de P_n en fonction de a, b et n.

EXERCICE II

Une enquête statistique chez 1 000 commerçants porte sur le nombre d'heures d'ouverture hebdomadaire ainsi que sur le nombre d'employés. On a obtenu les résultats suivants :

Nombre d'employés y_i	Nombre d'heures d'ouverture par classe	Centre de classe x_i	Nombre de commerçants n_i
0	[30,35[	32,5	50
1	[35,37[	36	100
2	[37,39[	38	200
3	[39,40[	39,5	150
4	[40,41[	40,5	120
5	[41,43[	42	n_6
6	[43,45[	44	130
7	[45,50[	47,5	n_8

I) On considère la distribution des heures d'ouverture (colonnes 2, 3 et 4 du tableau des résultats).

1°) Déterminer les valeurs des effectifs n_6 et n_8 sachant que le nombre moyen d'heures d'ouverture hebdomadaire est égal à 40,38 h.

2°) Calculer la médiane et l'écart-type de cette distribution.

3°) Le 250e établissement qui a le moins d'heures d'ouverture reste ouvert 38 h par semaine. Quelle est la durée d'ouverture du 250e établissement qui a le plus d'heures d'ouverture ?

II) On utilise maintenant toutes les informations du tableau initial. On fournit les calculs suivants :

$$\sum_i n_i y_i = 3\,660 \quad \sum_i n_i y_i^2 = 17\,500 \quad \sum_i n_i x_i y_i = 155\,085$$

1°) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre le nombre d'heures d'ouverture (x) et le nombre d'employés (y).

2°) Un commerçant souhaite rester ouvert pendant 56 heures chaque semaine, quelle estimation peut-il faire sur le nombre d'employés nécessaires à la bonne marche du magasin ?

T. S.V.P.

EXERCICE III

PRÉLIMINAIRES

La résolution numérique d'un système linéaire $AX = b$ où A désigne la matrice $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ peut s'effectuer par méthode itérative (dans le cas d'un grand nombre d'équations par exemple).

Elle consiste à déterminer par un procédé de calcul une suite de valeurs $X_p = \begin{pmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \\ \vdots \\ x_{np} \end{pmatrix}$ à partir

d'une valeur initiale X_0 ; telle que $\lim_{p \to +\infty} X_p = X$ où X est la solution du système.

On arrête les calculs lorsque la précision désirée est atteinte. Lorsque cette limite existe, la méthode sera dite convergente ; sinon, elle divergera.

Les méthodes classiques consistent à poser pour tout entier $p \geqslant 1$: $BX_p = CX_{p-1} + b$
où B et C sont des matrices carrées convenablement choisies et telles que B soit inversible.

On déduit $X_p = KX_{p-1} + W$ où $K = B^{-1}C$ et $W = B^{-1}b$.

1°) Exprimer X_p où $p \geqslant 1$ en fonction de X_0, X_1 et des matrices K, K^2, ..., K^{p-1}.

On admettra à partir de là, que la méthode itérative choisie est convergente si et seulement si la plus grande valeur propre de K est en valeur absolue inférieure à 1.

LE BUT DE L'EXERCICE EST DE COMPARER SUR DEUX EXEMPLES SIMPLES LA MÉTHODE DE GAUSS-SEIDEL ET LA MÉTHODE DE JACOBI.

NOTATIONS : $A = D - E - F$

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdot & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdot & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$; on pose $D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ $E = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \cdot \\ a_{31} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}$ et $F = -\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & 0 & \cdot & \cdot & a_{n-1n} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}$

MÉTHODE DE GAUSS-SEIDEL : On choisit $B = D - E$ et $C = F$.

MÉTHODE DE JACOBI : On choisit $B = D$ et $C = E + F$.

I On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1°) Calculer pour cette matrice A, la matrice K définie dans les préliminaires :
a) Pour la méthode de Gauss-Seidel.
b) Pour la méthode de Jacobi.

2°) Déterminer les valeurs propres de ces matrices.

3°) Vérifier que la méthode de Gauss-Seidel diverge tandis que la méthode de Jacobi converge.

II On considère la matrice $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -m_1 \\ -m_2 & 1 & 0 \\ 0 & -m_3 & 1 \end{pmatrix}$

où m_1, m_2, m_3 sont des nombres réels non nuls.

1°) Déterminer pour quelles valeurs de m_1, m_2, m_3 la méthode de Gauss-Seidel pour A' converge.

2°) Même question pour la méthode de Jacobi.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail